問題

いびつなサイコロがあり, 1 から 6 までのそれぞれの目が出る確率が $\frac{1}{6}$ とは限らないとする。

このサイコロを 2 回振ったとき同じ目が出る確率を P とし,
1 回目に奇数，2 回目に偶数の目が出る確率を Q とする。

(1) $P \geq \frac{1}{6}$ であることを示せ。また，等号が成立するための必要十分条件を求めよ。

(2) $\frac{1}{4} \geq Q \geq \frac{1}{2} - \frac{3}{2}P$ であることを示せ。

（2008 東京工業大学）

解答と解説

(1)

目$1,2,3,4,5,6$が出る確率をそれぞれa,b,c,d,e,fとすると，

同じ目が出る確率をPとするから，同じ目が出ない確率は$1-P$

よって，

$$1-P=2ab+2ac+2ad+2ae+2af+2bc+2bd+2be+2bf+2cd+2ce+2cf+2de+2df+2ef$$

補足：係数 2 の意味

たとえば 1 と 2 の目の出方は$1\to2$と$2\to1$の 2 通りがある。よって，その確率は$2ab$

ここでa,b,c,d,e,fは正数だから，相乗平均≦相加平均より，

$$\begin{aligned}&2ab+2ac+2ad+2ae+2af+2bc+2bd+2be+2bf+2cd+2ce+2cf+2de+2df+2ef\\&\quad\le(a^2+b^2)+(a^2+c^2)+(a^2+d^2)+(a^2+e^2)+(a^2+f^2)+(b^2+c^2)+(b^2+d^2)+(b^2+e^2)\\&\qquad+(b^2+f^2)+(c^2+d^2)+(c^2+e^2)+(c^2+f^2)+(d^2+e^2)+(d^2+f^2)+(e^2+f^2)\\&\quad=5(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)\end{aligned}$$

等号成立は$a=b=c=d=e=f=\dfrac{1}{6}$のとき

これと$P=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2$より，$1-P\le5P$

$\therefore P\ge\dfrac{1}{6}$　（等号成立は$a=b=c=d=e=f=\dfrac{1}{6}$のとき）　　（証明終わり）

等号成立は 1 から 6 のそれぞれの目が出る確率が$\dfrac{1}{6}$のとき　・・・(答)

(2)

1 回目に奇数，2 回目に偶数の目が出る確率$Q=(a+c+e)(b+d+f)$

また，$P=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2$

よって，

$$\begin{aligned}2Q-1+3P&=2(a+c+e)(b+d+f)-1+3(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)\\&=(a+b+c+d+e+f)^2-1\\&\quad+2a^2+2b^2+2c^2+2d^2+2e^2+2f^2-2ac-2ae-2ce-2bd-2bf-2df\\&=1^2-1+(a-c)^2+(a-e)^2+(c-e)^2+(b-d)^2+(b-f)^2+(d-f)^2\\&=(a-c)^2+(a-e)^2+(c-e)^2+(b-d)^2+(b-f)^2+(d-f)^2\ge0\end{aligned}$$

等号成立は$a=b=c=d=e=f=\dfrac{1}{6}$のとき

よって，

$Q\ge\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}P$　（等号成立は 1 から 6 のそれぞれの目が出る確率が$\dfrac{1}{6}$のとき）　・・・①

$$
\begin{aligned}
1-4Q &= 1-4(a+c+e)(b+d+f) \\
&= 1-4(a+c+e)\{1-(a+c+e)\} \\
&= 4(a+c+e)^2-4(a+c+e)+1 \\
&= \{2(a+c+e)-1\}^2 \geq 0
\end{aligned}
$$

等号成立は$a+c+e=b+d+f=\dfrac{1}{2}$のとき

よって，

$\dfrac{1}{4} \geq Q$ （等号は奇数の目が出る確率が$\dfrac{1}{2}$のとき） ・・・②

①，②より，$\dfrac{1}{4} \geq Q \geq \dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}P$が成り立つ。